

Zestaw 1
Rachunek wektorowy, pochodny i całkowy

1. Dane są wektory $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{b} = 3\hat{i}$, $\vec{c} = 2\hat{j}$. Wykonać następujące działania:
 - a) $\vec{a} + \vec{b}$
 - b) $\vec{a} - \vec{b}$
 - c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 - d) $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ (wyznaczyć współrzędne otrzymanych wektorów, policzyć ich długości)
 - e) Oblicz składowe wektora $\vec{a}$ wzdłuż wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}$
 - f) Oblicz składową (długość) wektora $\vec{a}$ wzdłuż osi prostopadłej do wektora $\vec{b}$ i leżącej na płaszczyźnie wyznaczonej przez te dwa wektory
 - g) Oblicz składową (długość) wektora $\vec{a}$ wzdłuż osi prostopadłej do wektora $\vec{c}$ i leżącej na płaszczyźnie wyznaczonej przez te dwa wektory.
2. Dany jest wektor $\vec{r} = 1\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$:
 - a) Rozłożyć wektor $\vec{r}$ na składowe wzdłuż osi układu współrzędnych.
 - b) Podać długości składowych wektora $\vec{r}$.
 - c) Obliczyć długość wektora $\vec{r}$.
 - d) Wyznaczyć kąty pomiędzy wektorem $\vec{r}$ a osiami układu współrzędnych.
3. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego, obliczyć kąty α , β , γ pomiędzy wektorami $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{k}$ i $\vec{c} = \hat{j} + \hat{k}$.
4. Dane są wektory $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ oraz $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{k}$, obliczyć kąt między tymi wektorami.
5. Wyznacz wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wiedząc, że $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{c}$, a $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$.
6. Wektor $\vec{a}$ o długości 10 jednostek i wektor $\vec{b}$ o długości 6 jednostek tworzą ze sobą kąt 60° . Ile wynosi:
 - a) Iloczyn skalarny tych wektorów?
 - b) Długość iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$?
7. Pokazać (dla przypadku dwuwymiarowego), że istnieje równość:
$$\vec{a} \circ \vec{b} = ab \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y.$$
8. Sprawdź, czy wektory:
$$\vec{u} = [1, 1, 0], \vec{v} = [1, -1, 0] \text{ i } \vec{w} = [0, 0, 1],$$
są do siebie prostopadłe.
9. Pewien wektor ma współrzędne początku (15,17), zaś współrzędne końca wynoszą (-2,7). Jaka jest jego długość i jaki kąt tworzy z osią x?
10. Załóżmy, że $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są trzema dowolnymi wektorami nieleżącymi w jednej płaszczyźnie. Nie muszą one tworzyć ze sobą kątów prostych. Wykazać, że:
$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \circ (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}).$$
11. Poszukiwacz skarbów znajduje srebrną monetę 20,0 m od wyschniętej studni w kierunku 20° na północ od kierunku wschodniego i złotą monetę 10,0 m od studni w kierunku 20° na północ od kierunku zachodniego. Jakie są współrzędne biegunowe i kartezjańskie jego znalezisk względem studni?

12. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $y = 5x^3 + 2x + 1$

b) $y = e^x(x^2 + 1)$

c) $y = e^{-x}$

d) $y = \sin \sqrt{\frac{1-2x}{x}}$

e) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \ln(\cos x)$

g) $y = (x + 1)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

h) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

13. Obliczyć całki:

a) $\int (x^2 + y^2) dx$

b) $\int (2x + 3x^2) dx$

c) $\int \frac{x dx}{1+x^2}$

d) $\int x e^{-x^2} dx$

e) $\int \cos^2 x dx$

f) $\int \sin^2 x dx$